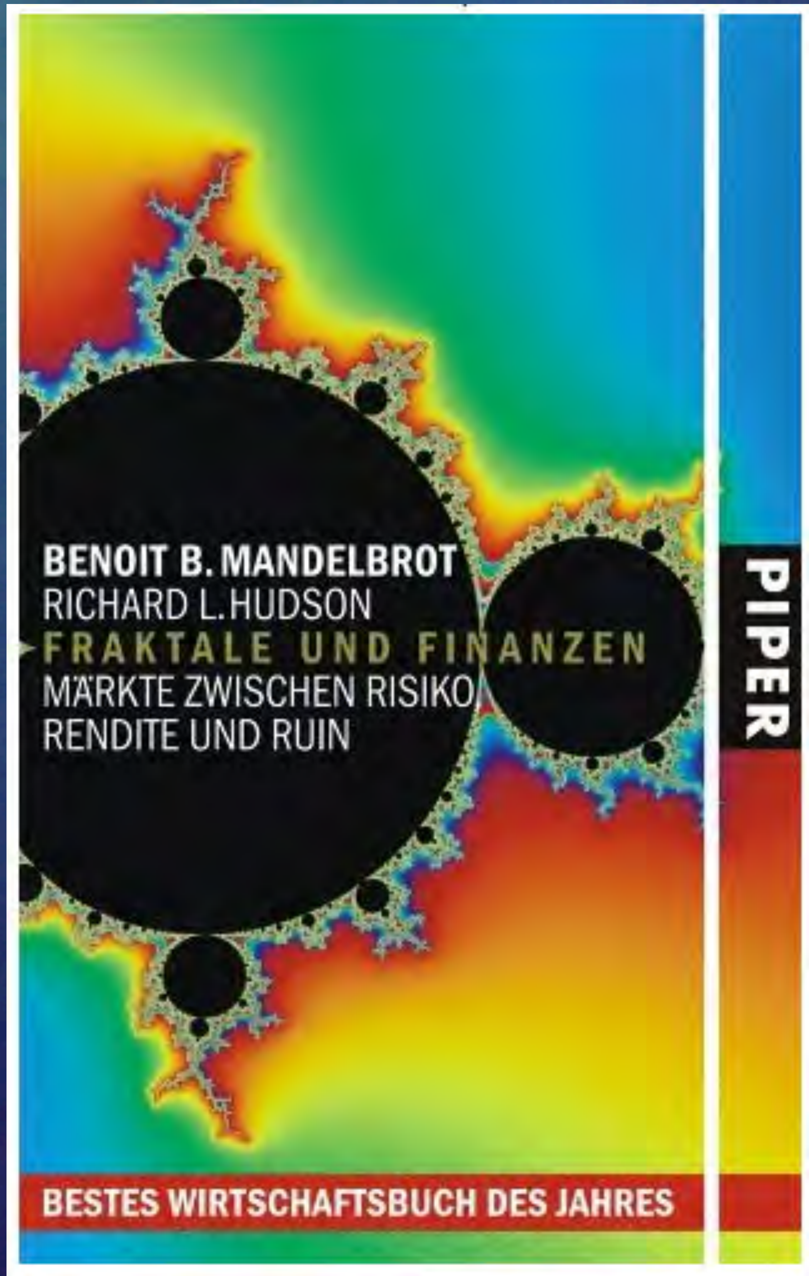
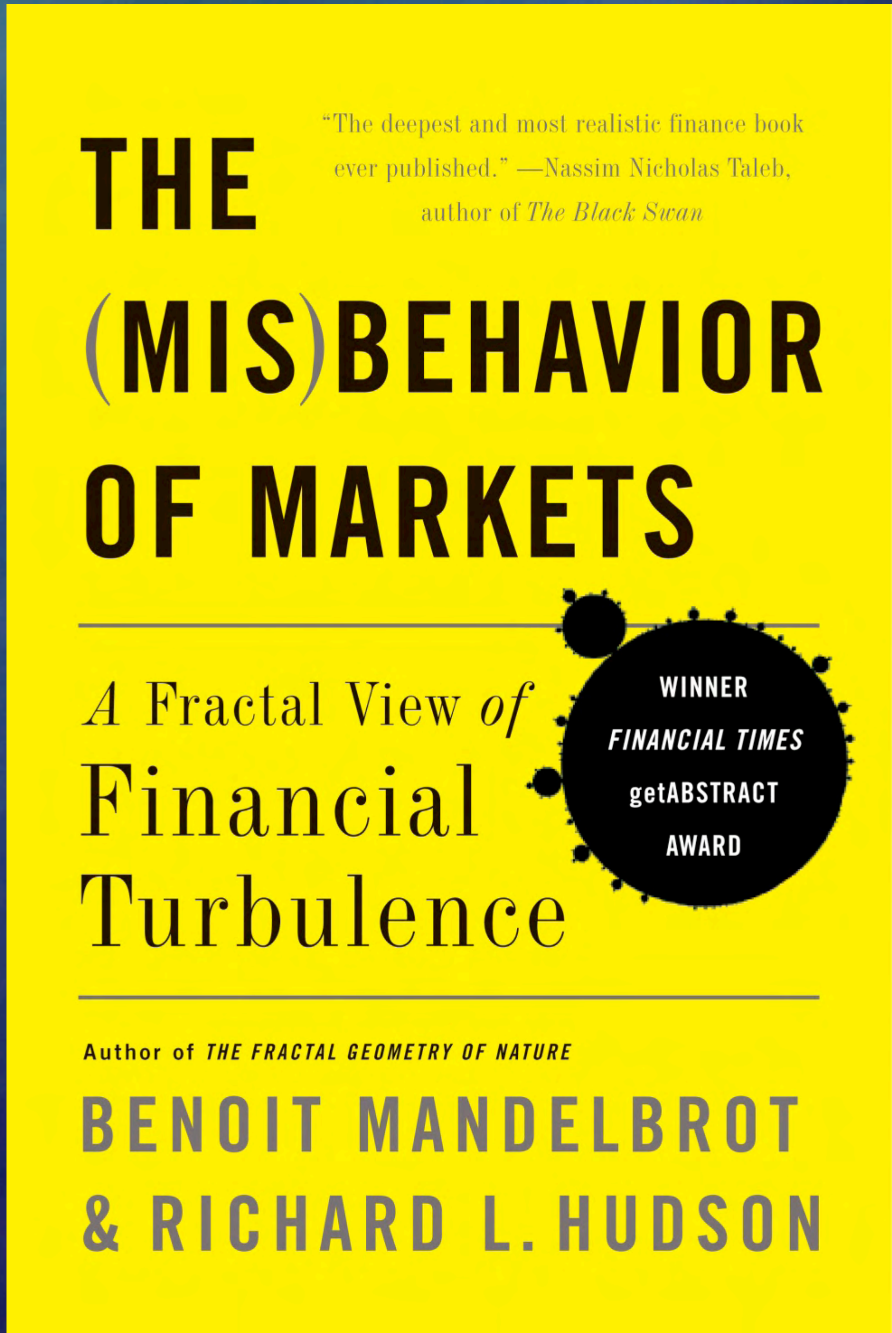
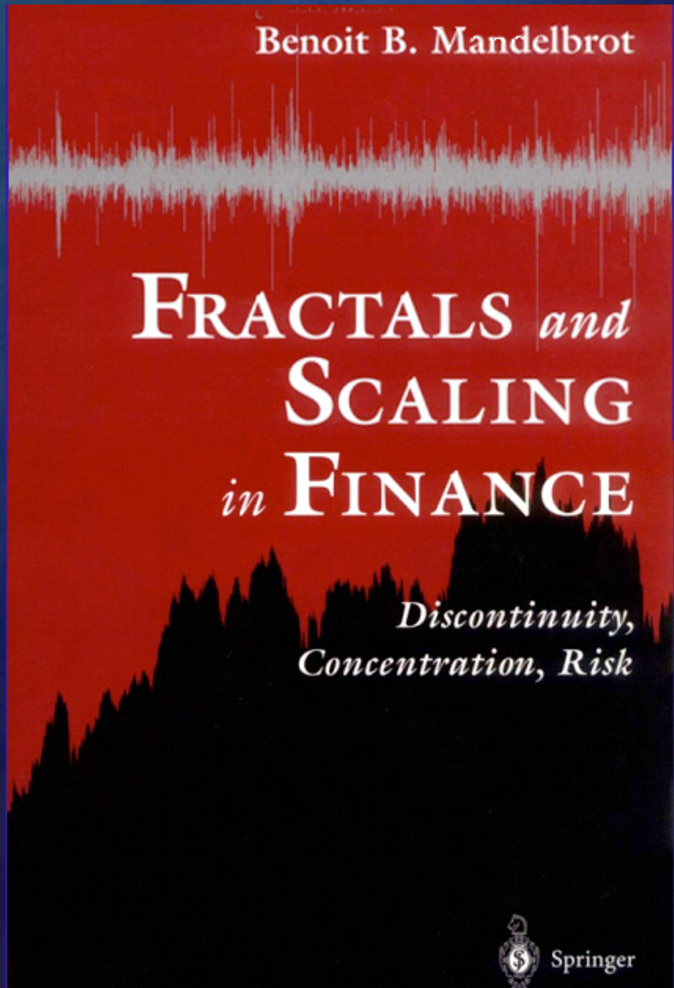
Wild Markets: The Fractal/Multifractal View of Risk, Ruin, and Reward

Benoit Mandelbrot

Sterling Professor of Mathematical Sciences
Emeritus, Yale University, New Haven CT


BENOIT B. MANDELBROT
RICHARD L. HUDSON
FRAKTALE UND FINANZEN
MÄRKTE ZWISCHEN RISIKO
RENDITE UND RUIN
PIPER
BESTES WIRTSCHAFTSBUCH DES JAHRES


"The deepest and most realistic finance book ever published." —Nassim Nicholas Taleb, author of The Black Swan
THE (MIS)BEHAVIOR OF MARKETS
A Fractal View of Financial Turbulence
WINNER FINANCIAL TIMES getABSTRACT AWARD
Author of THE FRACTAL GEOMETRY OF NATURE
BENOIT MANDELBROT & RICHARD L. HUDSON


Benoit B. Mandelbrot
FRACTALS and SCALING in FINANCE
Discontinuity, Concentration, Risk
Springer

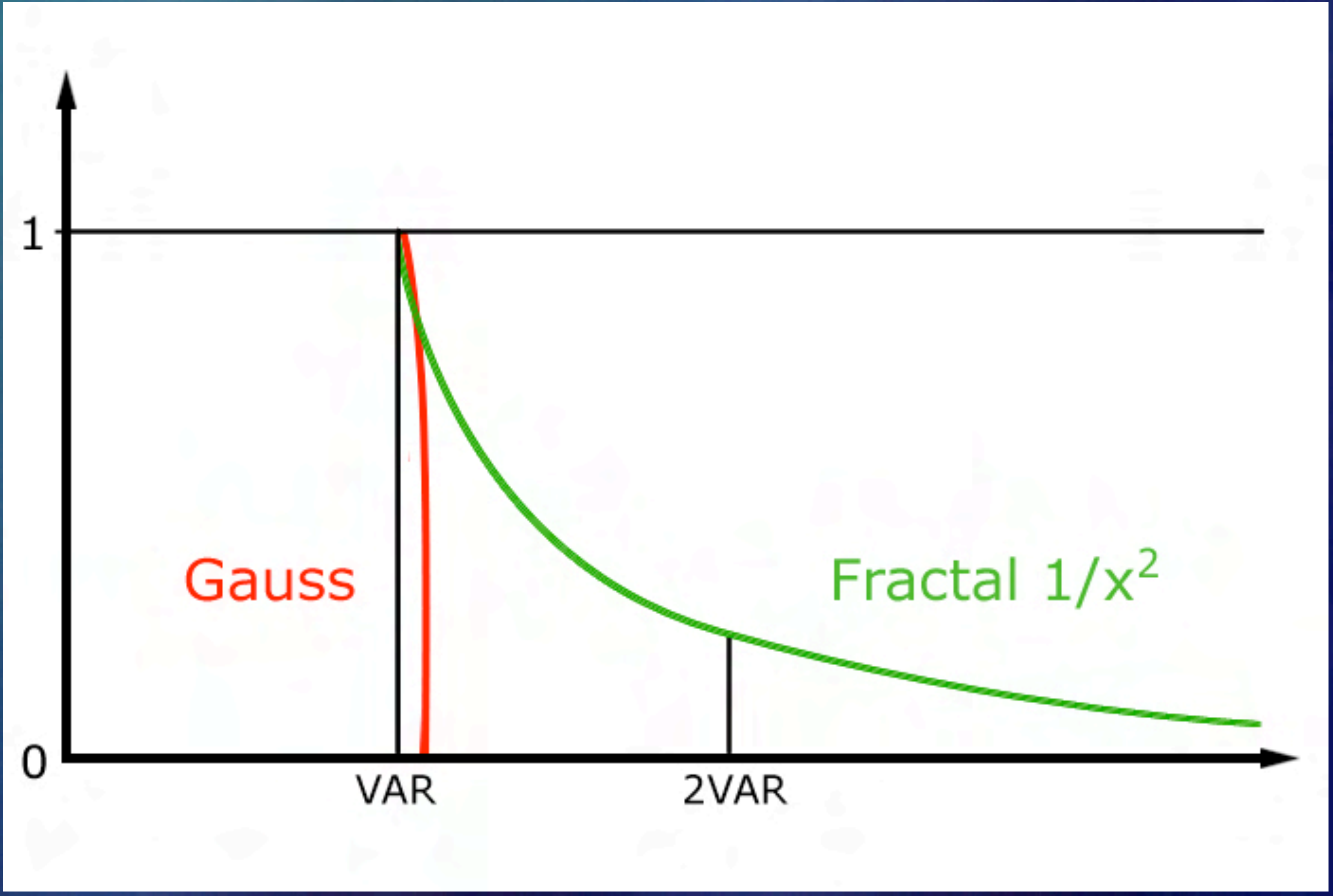
On Rocks.

A stone, when it is examined will be found a mountain in miniature. The fineness of Nature's work is so great, that, into a single block, a foot or two in diameter, she can compress as many changes of form and structure, on a small scale, as she needs for her mountains on a large one.

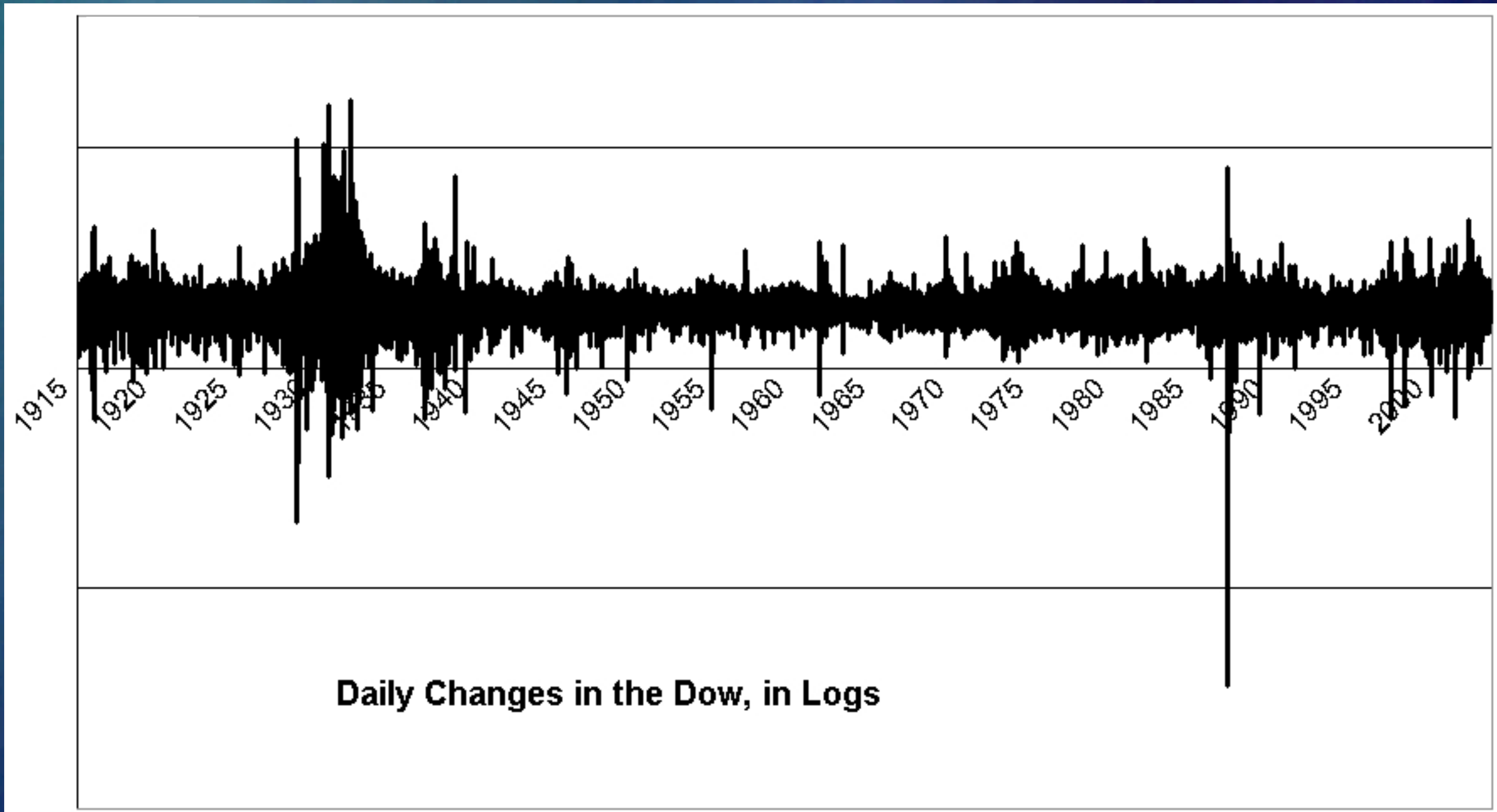
J. Ruskin, *Modern Painters* (1860)

A LOT CAN HAPPEN IN TEN DAYS

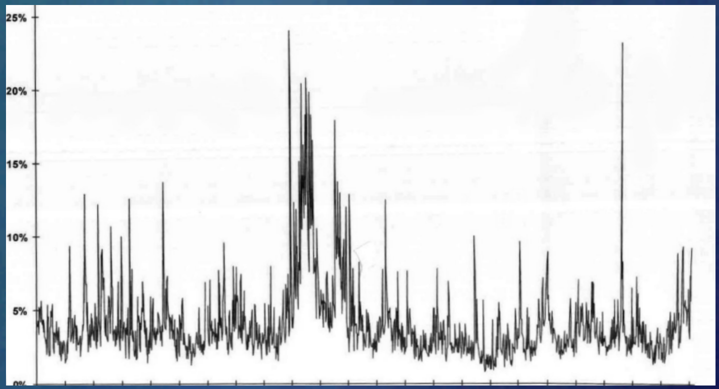
Conventional finance theory treats big one-day market jumps or drops as anomalies that can be safely ignored when gauging risk or forecasting returns. But if you remove the ten biggest one-day moves (both up and down) from a chart of the S&P 500 over the past 20 years, you get a picture very different from market reality. The big moves matter.



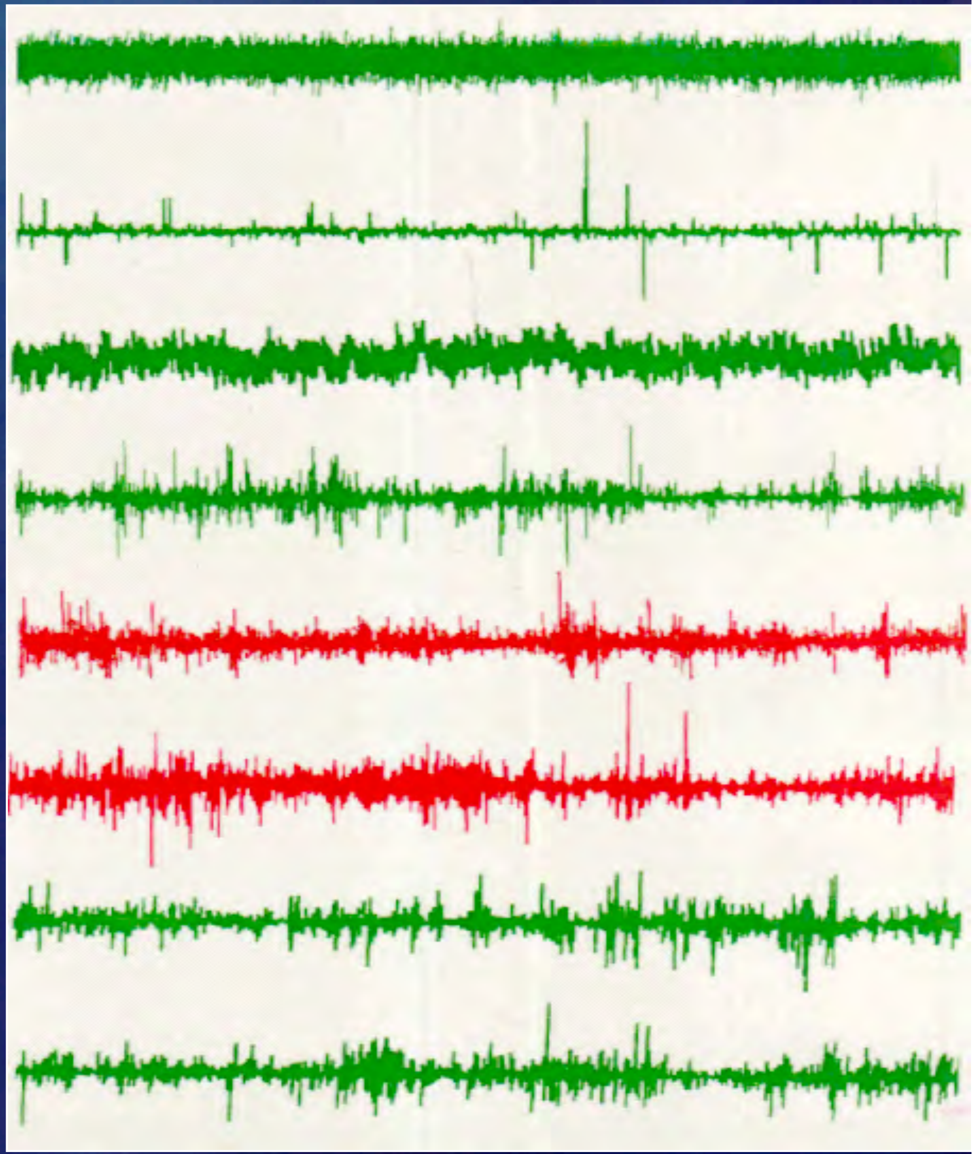
VAR & Conditional Probabilities

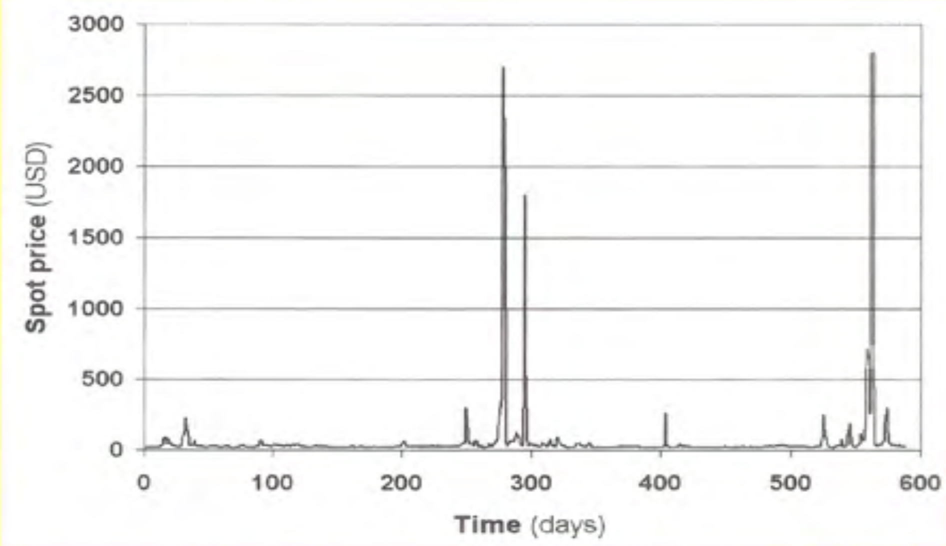

1915
1920
1925
1930
1935
1940
1945
1950
1955
1960
1965
1970
1975
1980
1985
1990
1995
2000
Daily Changes in the Dow, in Logs

The Variation of Financial Prices

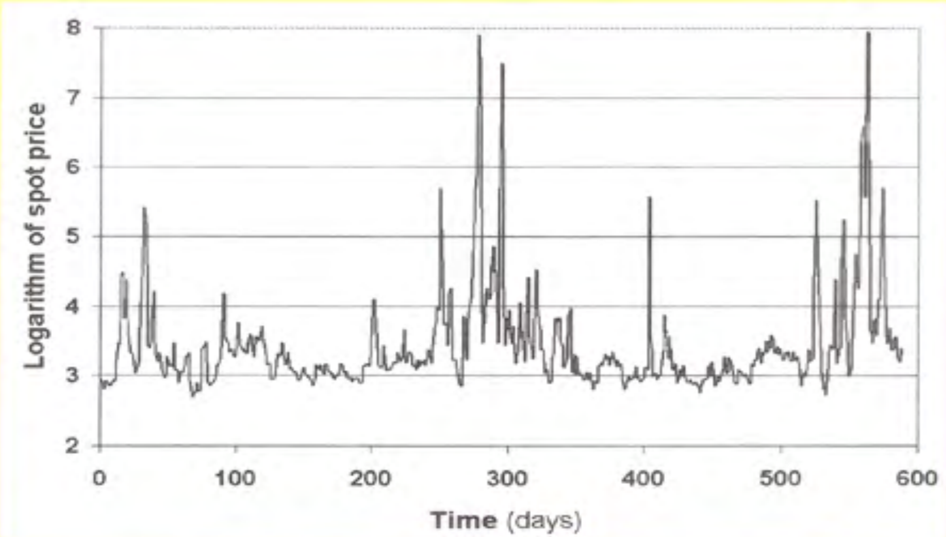


Stack of price increments: actual data mixed with simulations: Brownian, unifractal, mesofractal, and multifractal





Daily electricity spot prices, February 6, 1997–June 9, 1999



Logarithm of daily electricity spot prices, February 6, 1997–June 9, 1999

“Ten sigma” events probability,
according to the Gaussian distribution, is:

a few millionths

of a millionth

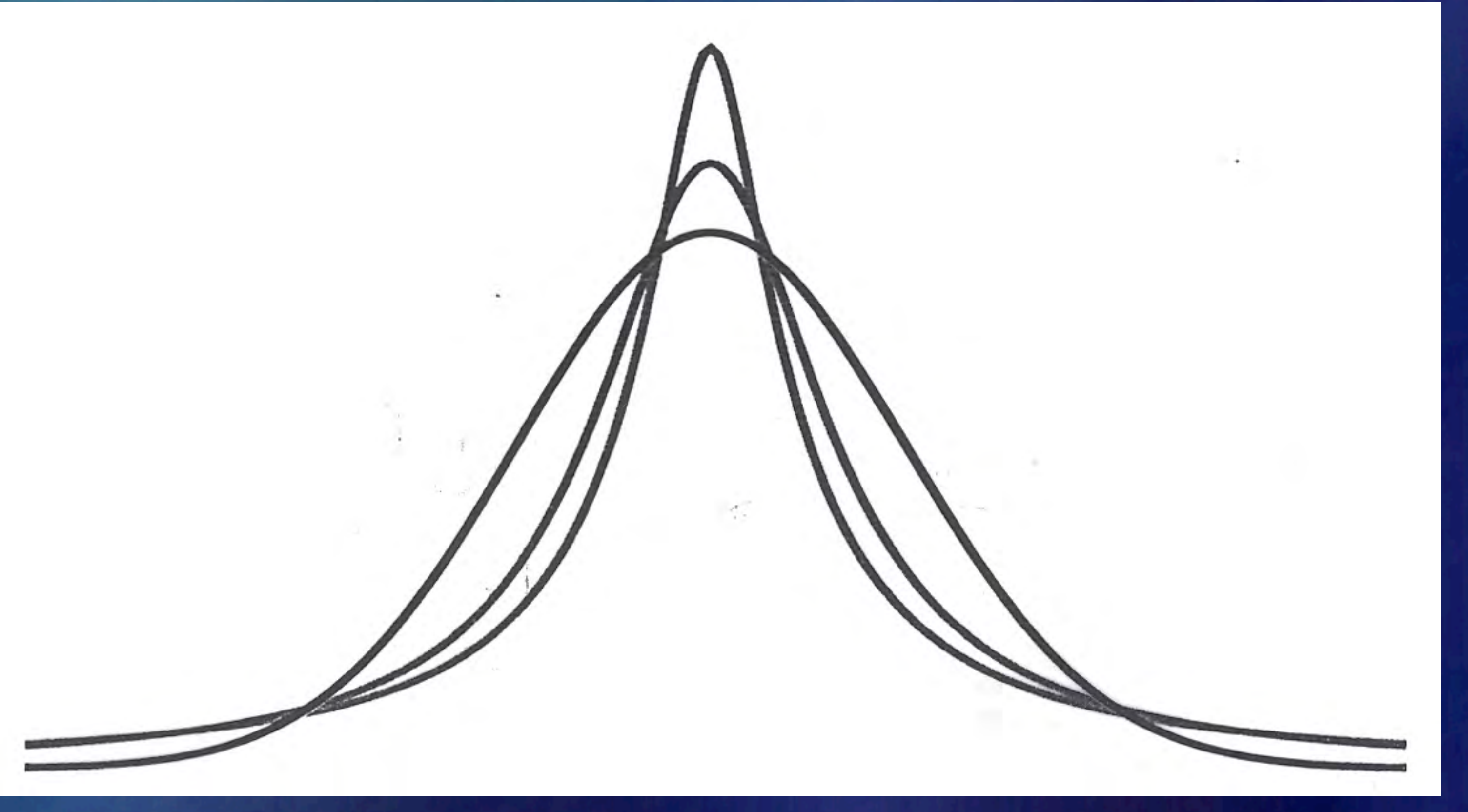
of a millionth

of a millionth

(Inverse of the Avogadro number!)

Absurd. The Gaussian is not a “norm.”

It grossly *fails* to fit reality.

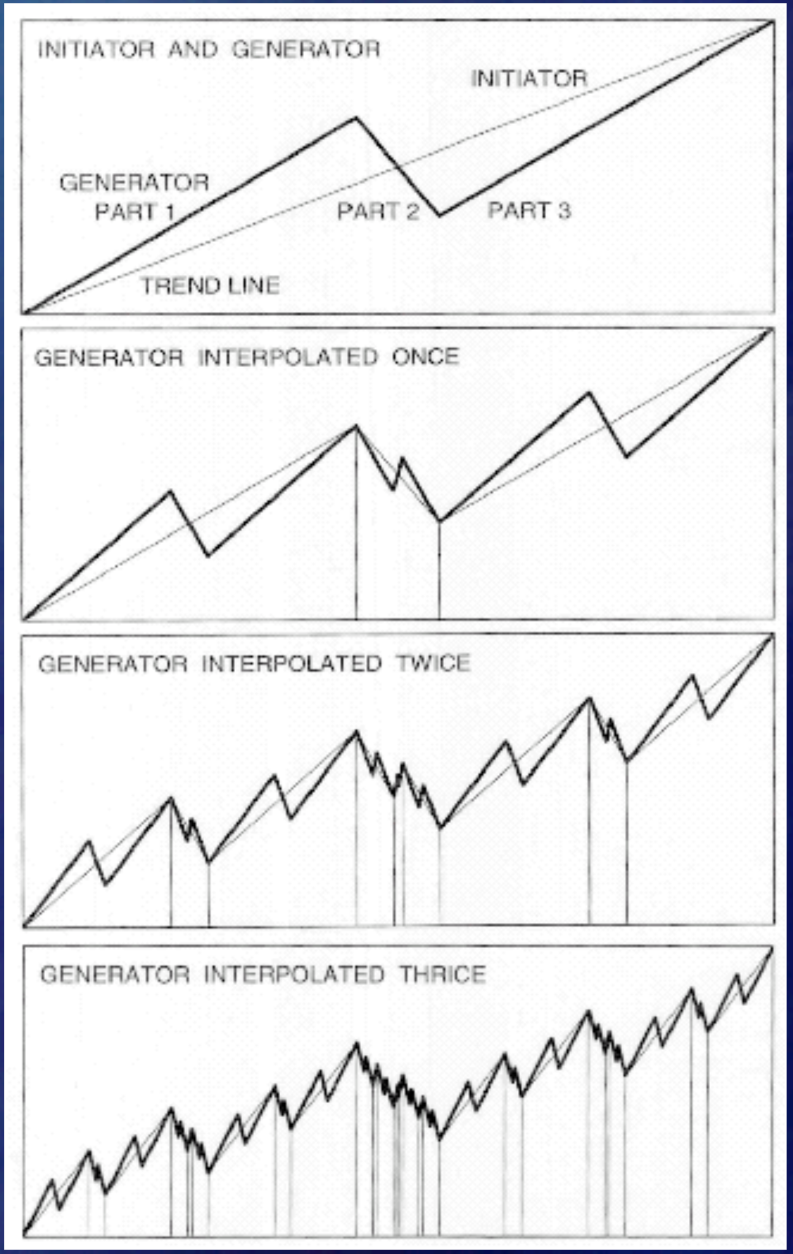


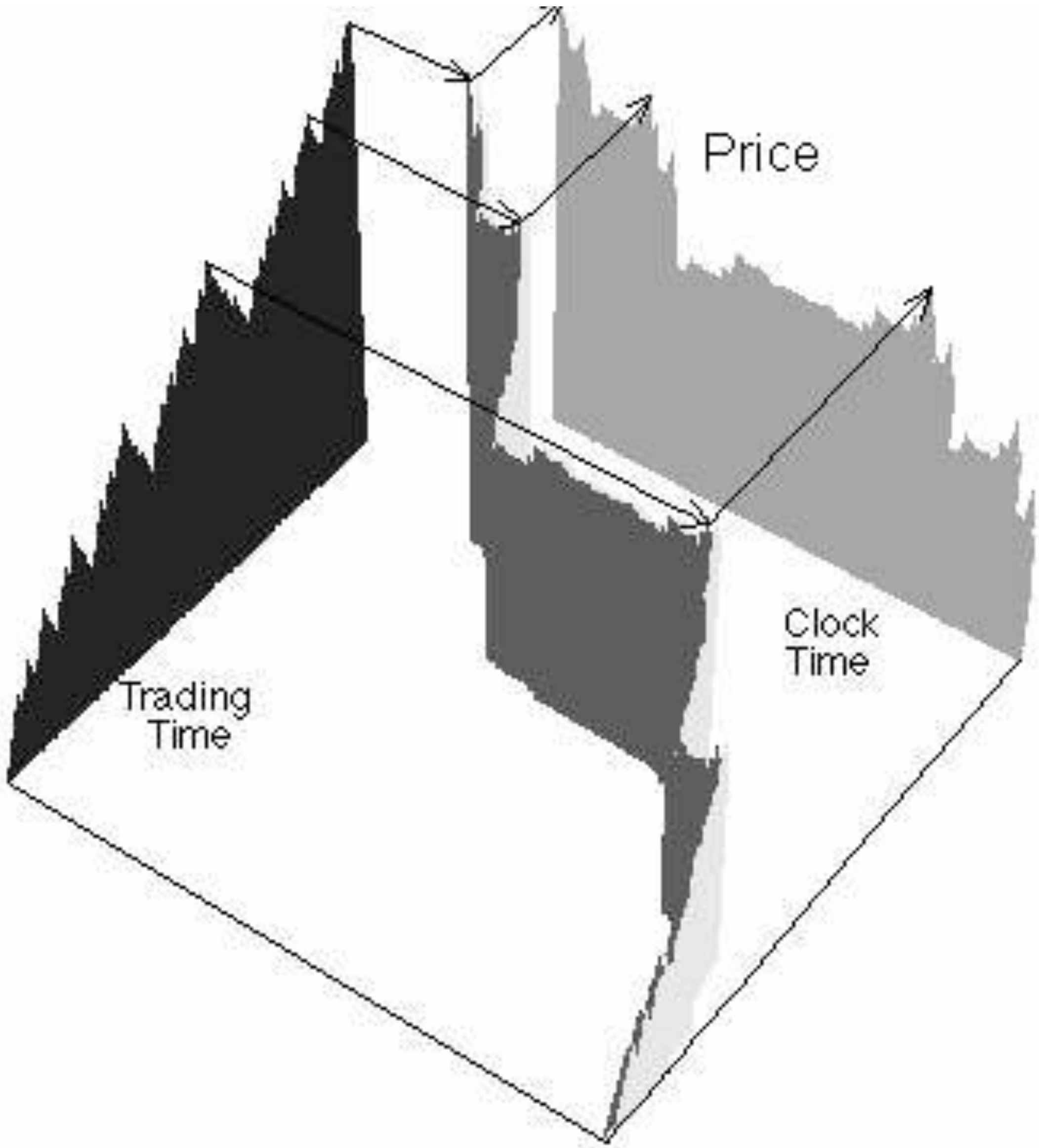
Least peaked bell: Gaussian
Most peaked bell: Cauchy
In between bell: Lévy stable distribution.

Cartoons of Price Variation

Fractal model founded on scaling or self-affinity, a principle of invariance under reduction or dilation.

- Generator is symmetric, hence defined by its first break point
- Recursive roughening implemented by a cascade



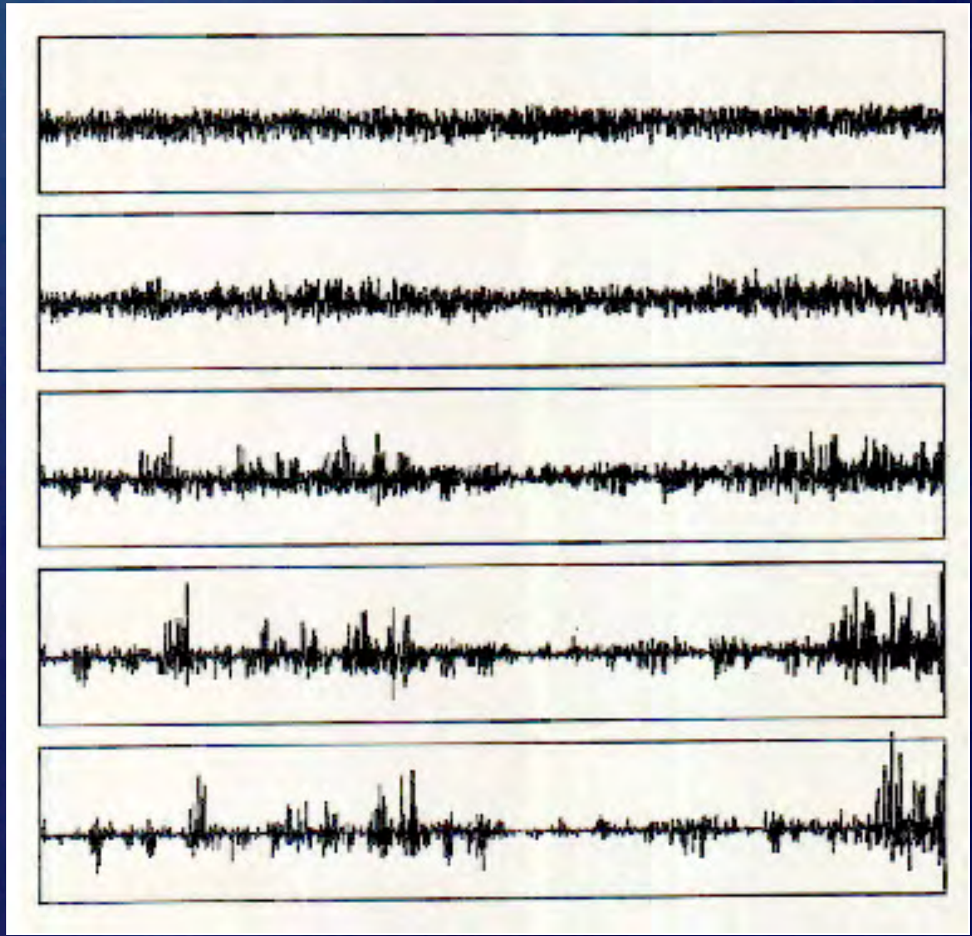

Price
Clock
Time
Trading
Time

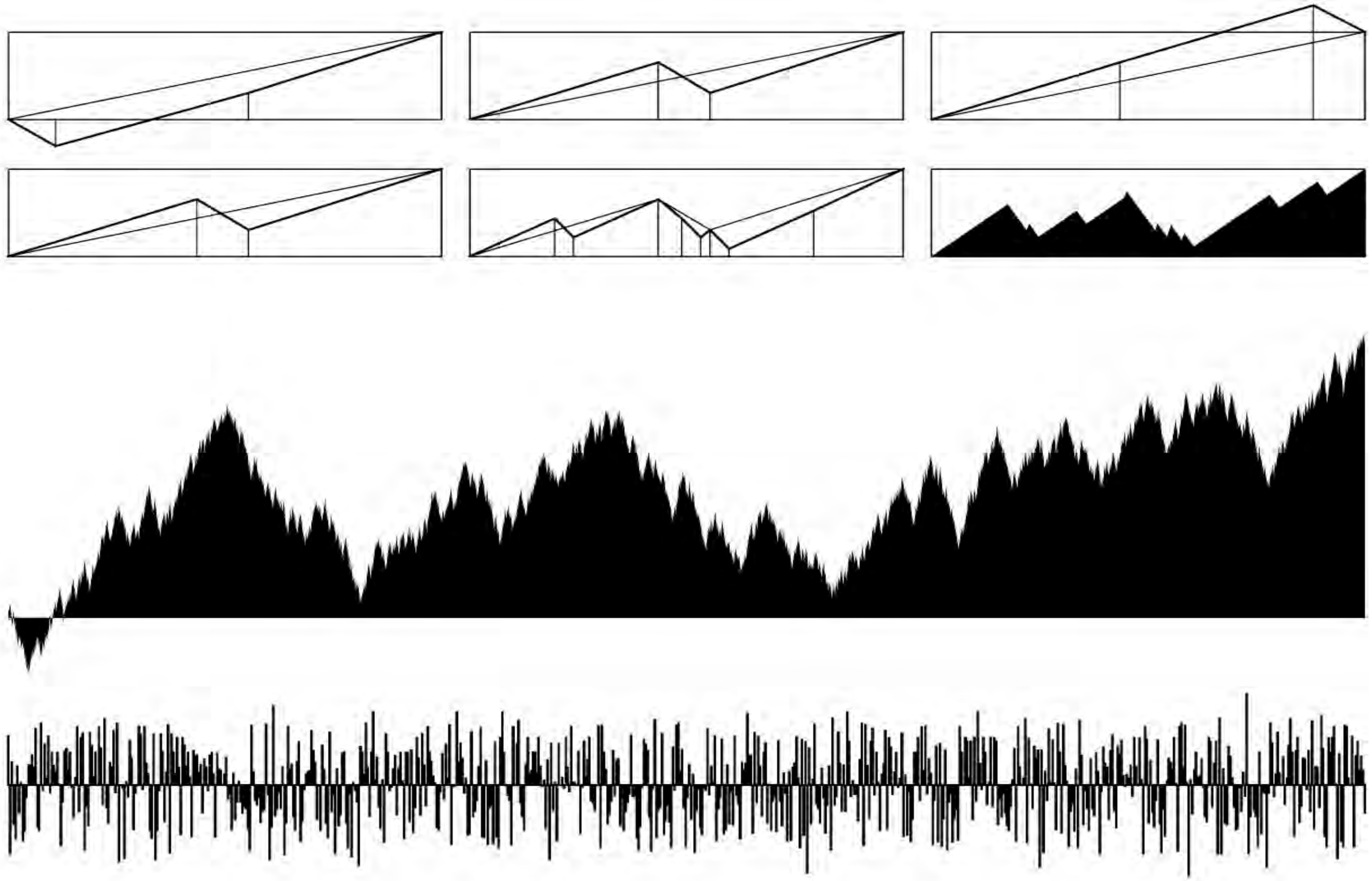
Cartoons' Output: Simple to Complex

A cascade's outcome

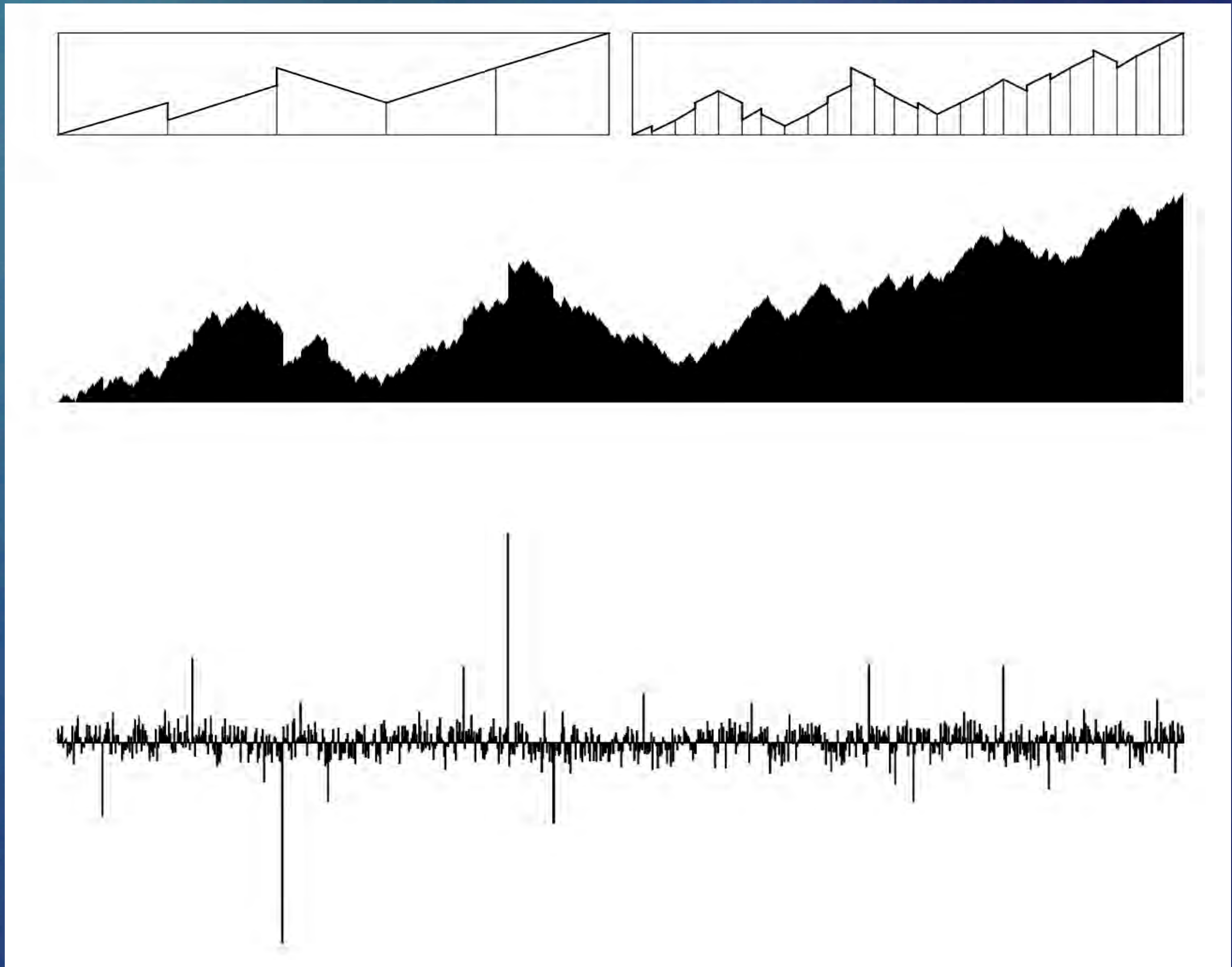
- is varied and variable
- is tunable from overly simple to overly complex

Guarantee: these cartoons hide no "additive"
beyond shuffling

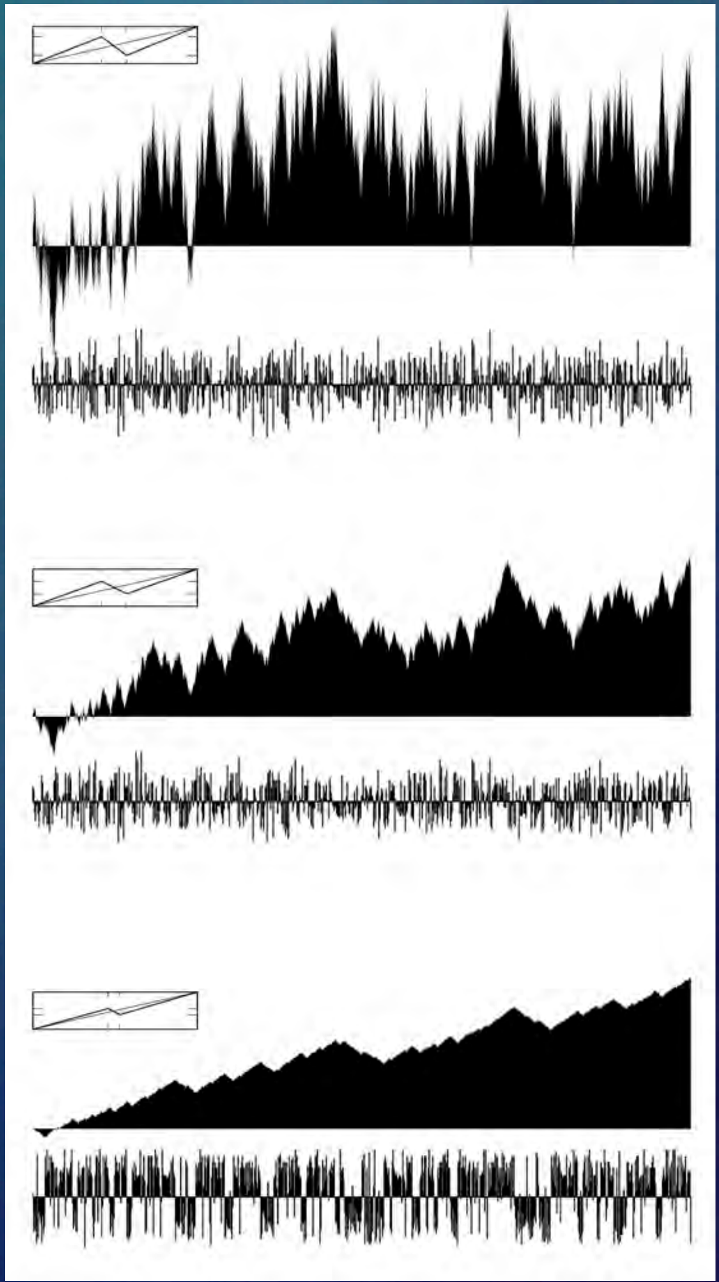




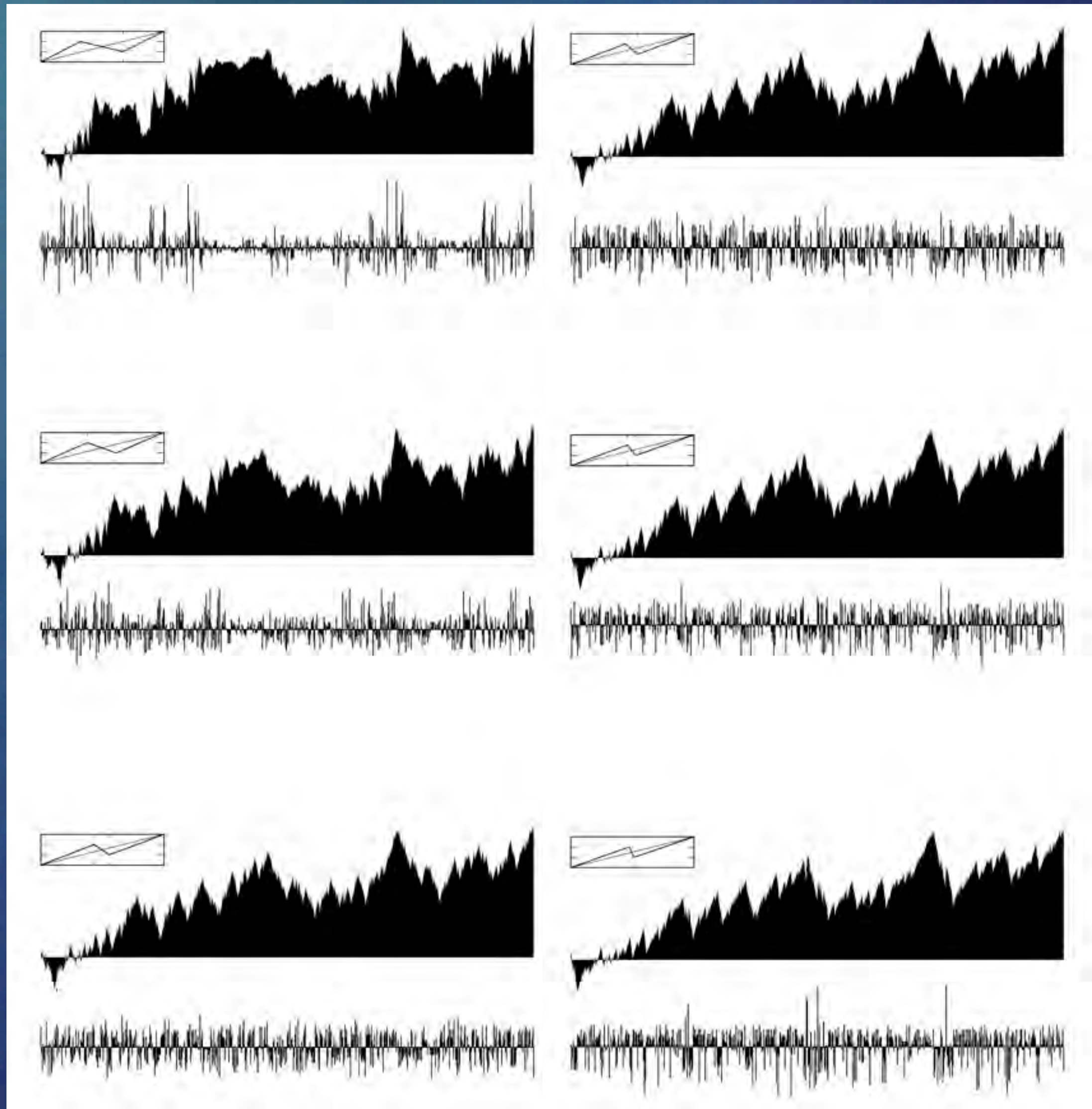
Recursive fractal cartoon of Brownian motion



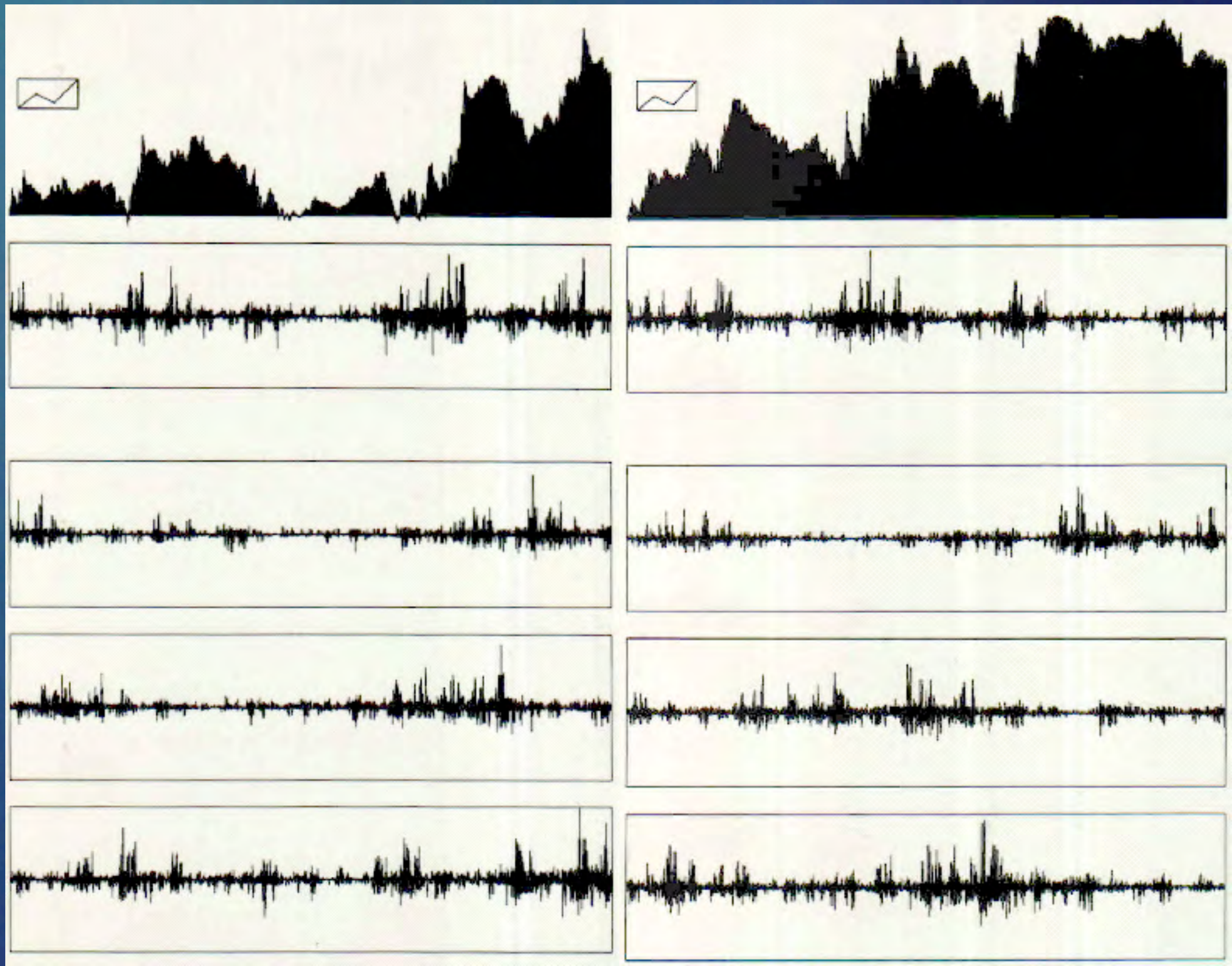
Recursive fractal cartoon of Lévy stable motion



Recursive fractal cartoon of fractional Brownian motions



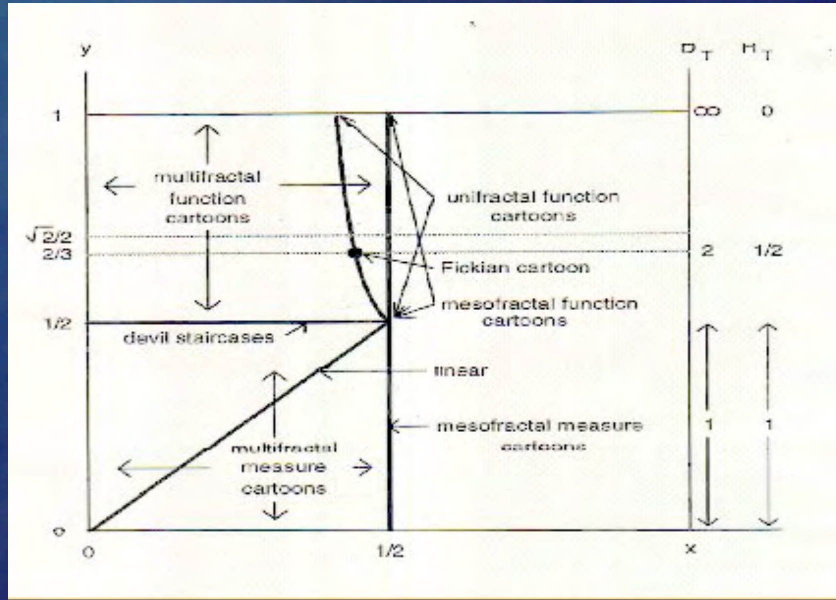
Recursive cartoons of multifractal functions

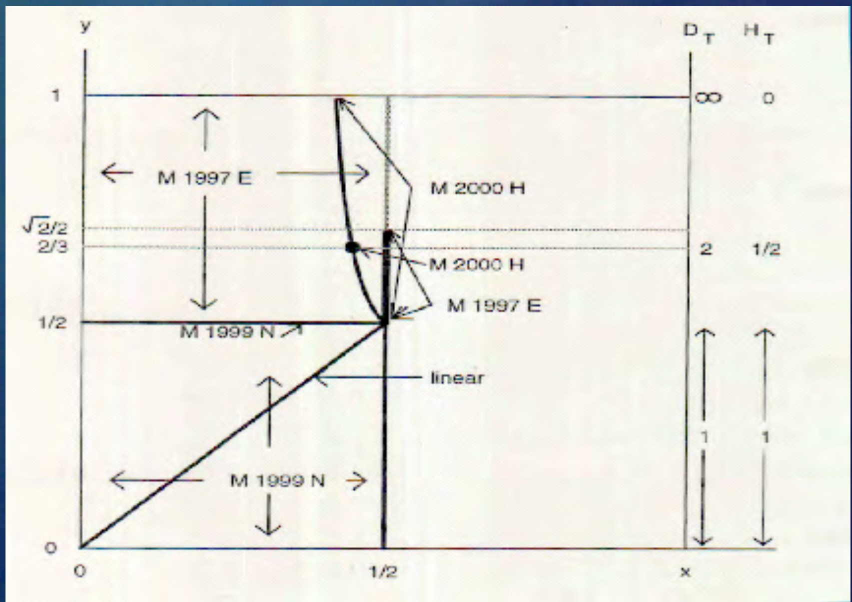


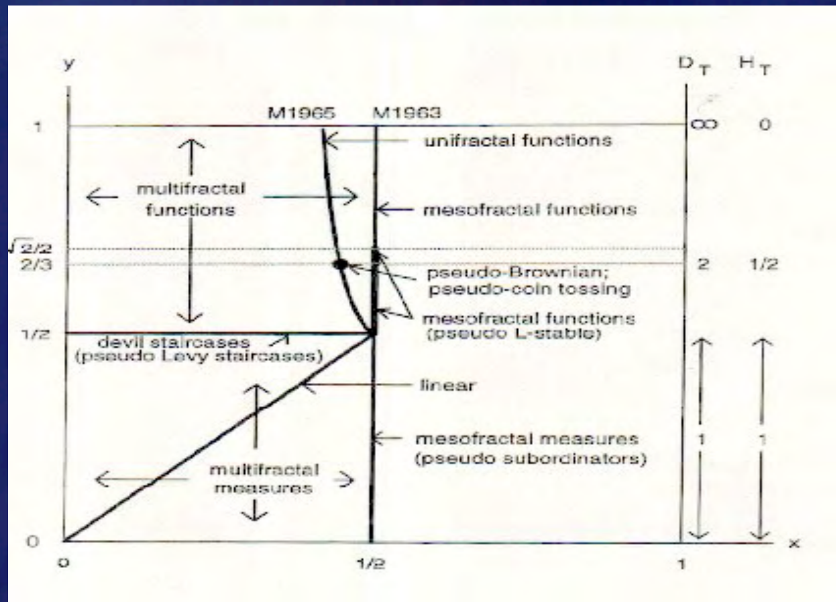
Eight samples from one multifractal population

Cartoons' Phase Diagram

The plot's coordinates define the first break of the cartoon generator







States of Randomness/Variability: The "Mild State"

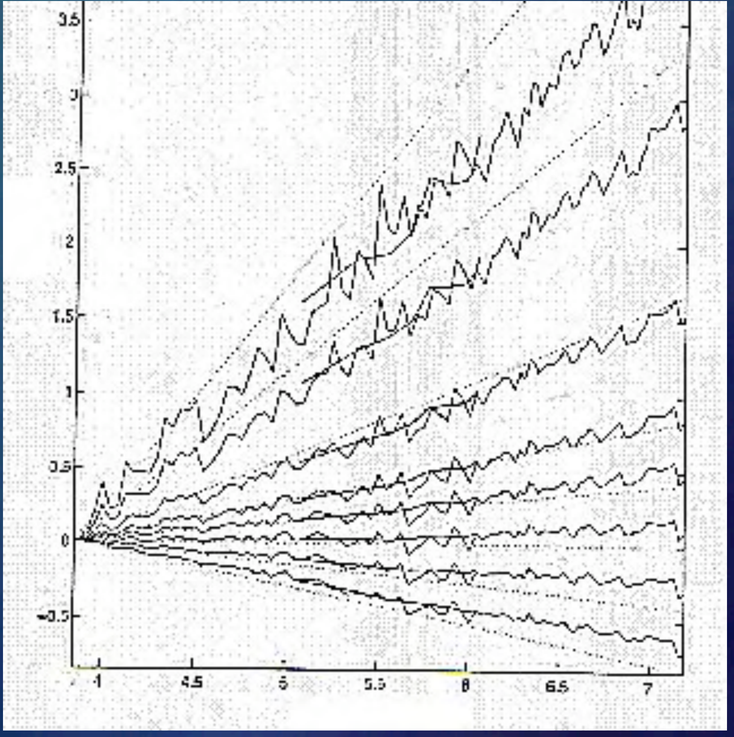
- The common apparatus of probability/statistics: law of large numbers, central limit theorem, asymptotically negligible addends and correlation
- Constitutes a "mild" or "passive" "state" of randomness/variability, patterned on the Brownian
- Implemented by the isolated Fickian point
- This state cannot "create" structure, only blurs existing structure
- Mild randomness was the first stage of indeterminism but does not exhaust it; indeterminism extends beyond this first stage.

States Of Randomness/Variability: The "Wild" State

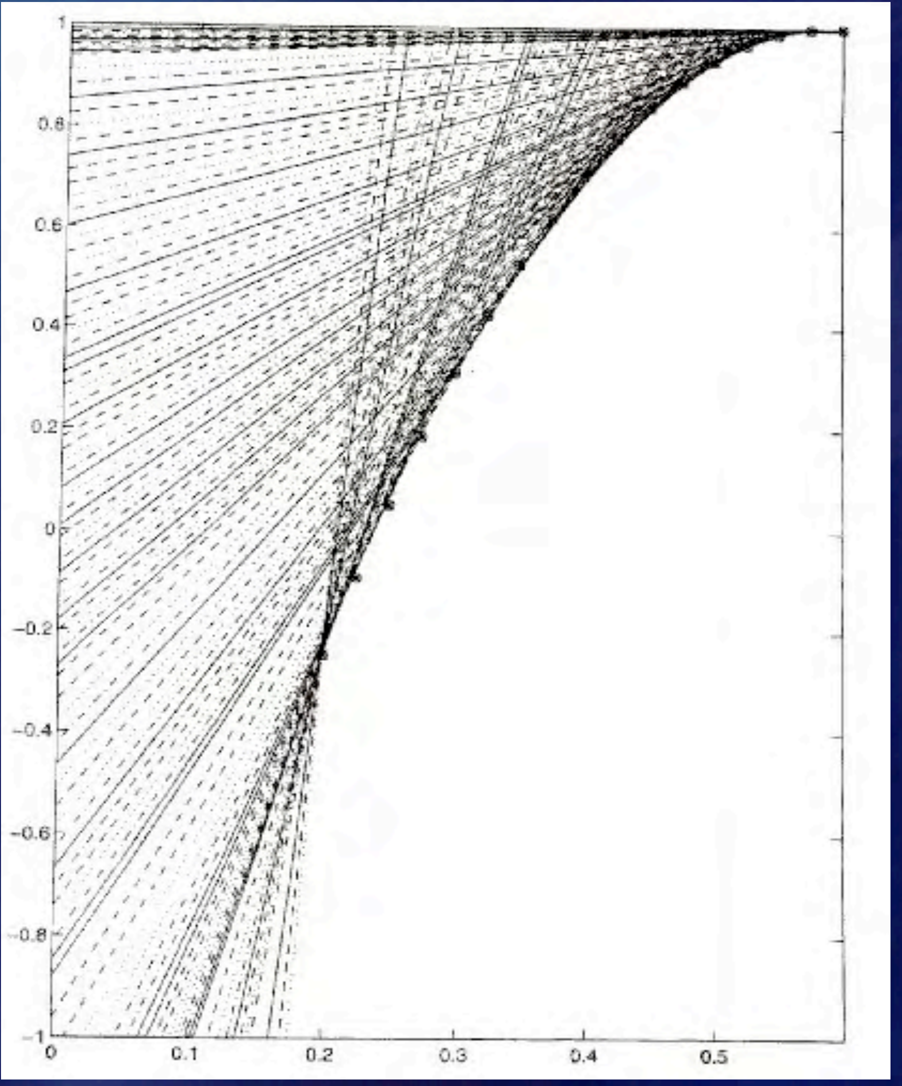
- **Non-Fickian cartoons exhibit long tails and/or long dependence**
- **As a result, the common apparatus *does not* apply**
- **The "wild," "active" or "creative" randomness *does not* average out**
- **It actually *mimics* structure- or *creates* its appearance**
- **Concentration: absent, mesofractal or multifractal**
- **Cartoons, models, and three-state representations**

Emperical Test of the Prices' Multifractality

determination of t(q)



determination of *f*(a) as an envelope



- **The step from mild to wild variability, from the first to the second stage of indeterminism, marks a sharp increase in complexity; a frontier for science**

- **For the reductionist: the chastening examples of turbulence and 1/*f* noises**

Roughness is a frontier that science long ignored; now it must be faced

- **The rms measures of volatility (in finance, metallurgy, etc.) assume mild variability**
- **Surprising riches: “fractals everywhere!”**
- **Legitimate concern: “too good to be true”**
- **Resolution: roughness must be faced;
it clearly contradicts mild variability;
wildly variable fractals often face it**

RESEARCH NOTE

NC-87 Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights

THE VARIATION OF CERTAIN SPECULATIVE PRICES

by

Benoit Mandelbrot

March 26, 1962

ABSTRACT: A new theory of the variation of prices is presented; it is based upon three successive modifications of the classical stochastic model due to Louis Bachelier (1900). The mathematical background is restated, many empirical data are presented, and a variety of statistical problems are raised.

This is a preliminary report, replacing RC-470.

IBM

CALCUL DES PROBABILITÉS ET ÉCONOMIE STATISTIQUE. — *Sur certains prix spéculatifs : faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs non gaussiens de Paul Lévy.* Note (*) de M. **Benoit Mandelbrot**, présentée par M. Joseph Kampé de Fériet.

1. *Une nouvelle observation empirique.* — Commençons par examiner la variation temporelle de certains prix spéculatifs. Les figures 1 et 2 se réfèrent aux prix du coton, livrable immédiatement, sur divers marchés américains; mais des résultats très analogues tiennent pour d'autres produits bruts et certaines actions industrielles. $Z(t)$ étant le prix de clôture au jour t, soit $L(t, T) = \log_e Z(t+T) - \log_e Z(t)$. Les figures 1 *a* et 2 *a* donnent $\mathrm{Fr}[L(t, 1) > u]$ et $\mathrm{Fr}[L(t, 1) < -u]$ pour 1900-1904. Les figures 1 *b* et 2 *b* donnent $\mathrm{Fr}[L(t, 1) > u]$ et $\mathrm{Fr}[L(t, 1) < -u]$ pour 1944-1958. Les figures 1 *c* et 2 *c* donnent $\mathrm{Fr}[L(t, \text{un mois}) > u]$ et $\mathrm{Fr}[L(t, \text{un mois}) < -u]$ pour 1880-1940. Les coordonnées sont bilogarithmiques (il nous paraît étonnant que — tout au moins à notre connaissance — les variations des prix n'aient pas été présentées de cette façon jusqu'ici). Fr = fréquence relative.

Il est clair que ces diverses courbes deviennent très vite des droites de pentes égales et voisines de $\alpha = 1{,}7$. Donc, on peut écrire :

$$\log\{\mathrm{Fr}[L(t, T) > u]\} \sim -\alpha \log u - \log C'(T),$$
$$\log\{\mathrm{Fr}[L(t, T) < -u]\} \sim -\alpha \log u - \log C''(T).$$

Ainsi la loi de Pareto est asymptotiquement satisfaite par les deux « queues »; $C' \neq C''$, donc il y a une légère asymétrie; la valeur moyenne de $L(t, T)$ est pratiquement nulle.

1 *a* et 1 *b* étant parallèles, la distribution de $L(t, 1)$, n'a bougé pendant la guerre que par changement d'échelle. Nous avons vérifié que — de 1816 à 1940 — la distribution de $L(t, 1)$ a très peu changé. Donc le parallélisme de 1 *a* et 1 *c*, et de 2 *a* et 2 *c*, montre que la distribution de $L(t, \text{un mois})$ ne diffère de celle de $L(t, 1)$ que par un changement d'échelle : on peut dire que la loi de distribution de $L(t, T)$ est « stable par changement de T ». Notons aussi que, α étant plus petit que 2, $L(t, 1)$ ne possède pas de moment au-delà du premier (*fig.* 3); donc, la plupart des « recettes » statistiques sont inapplicables.

2. *Modèle additif des changements des prix.* — Modifiant une hypothèse classique de Bachelier, supposons que les changements successifs de $\log Z(t)$ sont indépendants. Dans ce cas, la stabilité du n° 1 se confondrait avec la stabilité au sens de Paul Lévy, et la fonction caractéristique de $L(t, T)$ devrait nécessairement être de la forme

$$\varphi(\zeta) = \exp\left\{ iM\zeta - CT|\zeta|^{\alpha}\left[1 - i\beta\frac{\zeta}{|\zeta|}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\alpha\pi\right)\right]\right\}.$$

où

$$C > 0, \quad |\beta| \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{ou} \quad 1 < \alpha < 2.$$

On sait que les lois correspondantes sont asymptotiquement paretiennes avec l'indice α. Donc, le caractère paretien de $L(t, T)$ est « prédit » ou

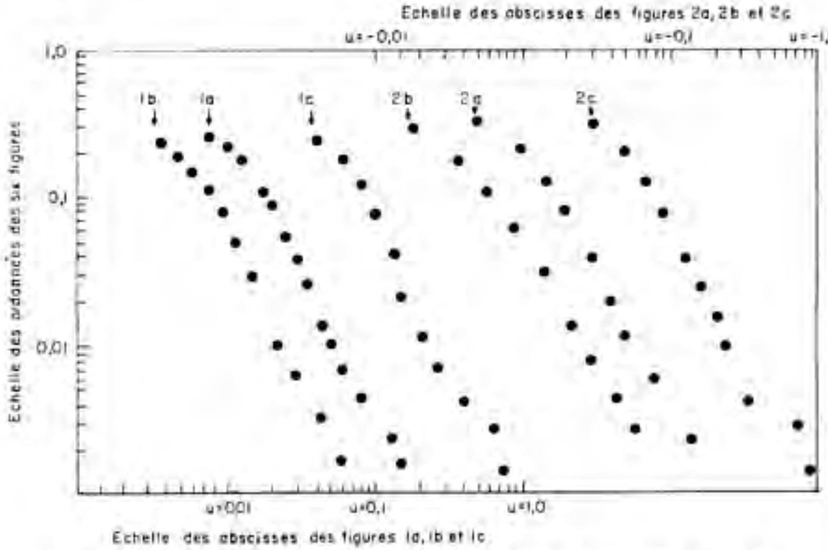


Fig. 1 *a*, 1 *b* et 1 *c*, 2 *a*, 2 *b* et 2 *c* : *Voir* l'explication dans le texte.

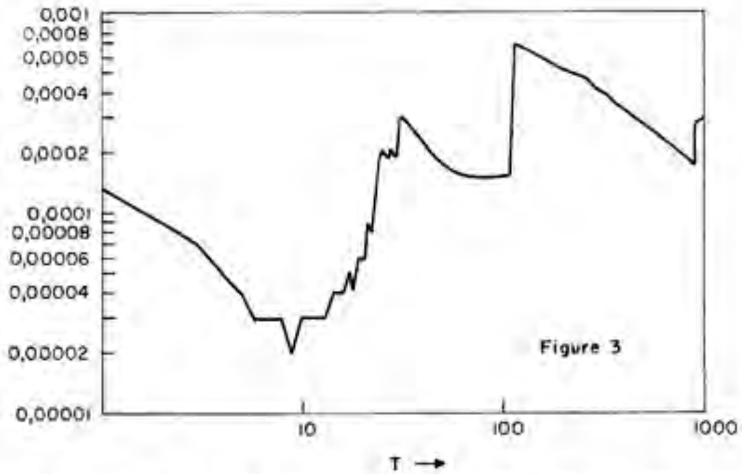


Fig. 3. — Illustration du fait que la distribution de $\log_e Z(t + \text{un jour}) - \log_e Z(t)$ n'a pas de deuxième moment, dans le cas des prix du coton sur le marché de New York : variation du deuxième moment empirique, lorsque l'échantillon varie de 1 à 1000 ; point de départ : le 21 septembre 1900.

« confirmé » par la stabilité; il a aussi été confirmé d'autres façons (*voir* n° 4).

On doit aussi avoir $C'(T) = T\,C'(1)$ et $C''(T) = T\,C''(1)$. Cette prédiction de la théorie de Lévy est aussi très proche des faits.

3. *Sur la théorie de la spéculation.* — Le modèle ci-dessus peut être interpolé en faisant du temps une variable continue. On sait que les fonctions engendrées par le processus correspondant sont presque sûrement presque partout discontinues. Ceci a les conséquences les plus étendues du point de vue de la théorie de la spéculation. La probabilité de ruine ne s'annule que si l'on spécule à 100 % de marge.

4. Une forme détaillée des résultats que nous venons d'annoncer constitue le rapport n° NC—87 du Centre de Recherches de la Compagnie I.B.M., à Yorktown Heights, New York, U. S. A. Notre théorie des prix spéculatifs présente les liens les plus étroits avec notre théorie des revenus, exposée précédemment [1].

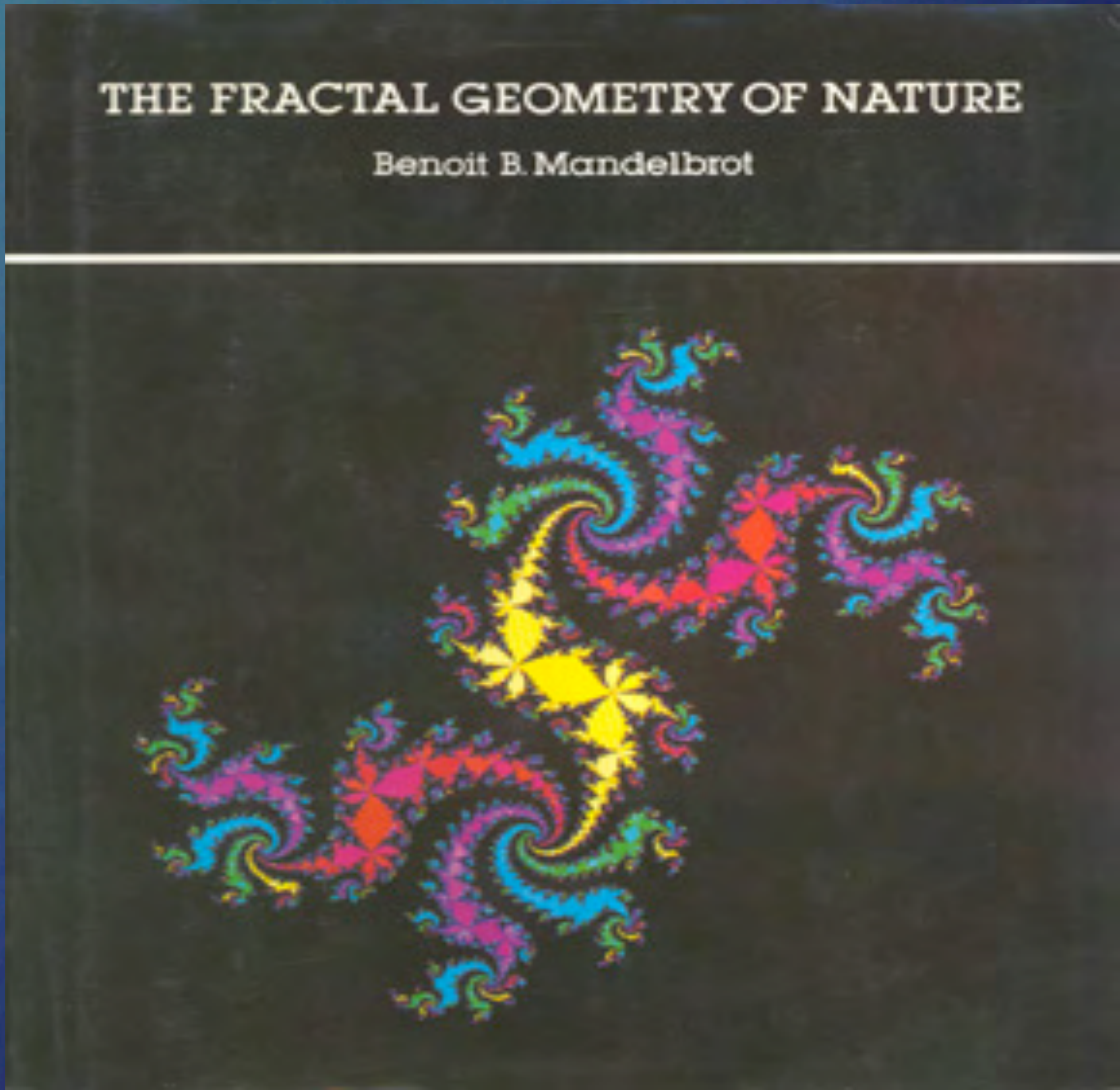
(*) Séance du 21 mai 1962.

[1] *International Economic Review*, 1, 1960, p. 79-106 et 3, 1962 (sous presse); *Econometrica*, 29, 1961, p. 517-543; *Quarterly Journal of Economics*, 76, 1962, p. 57-85.

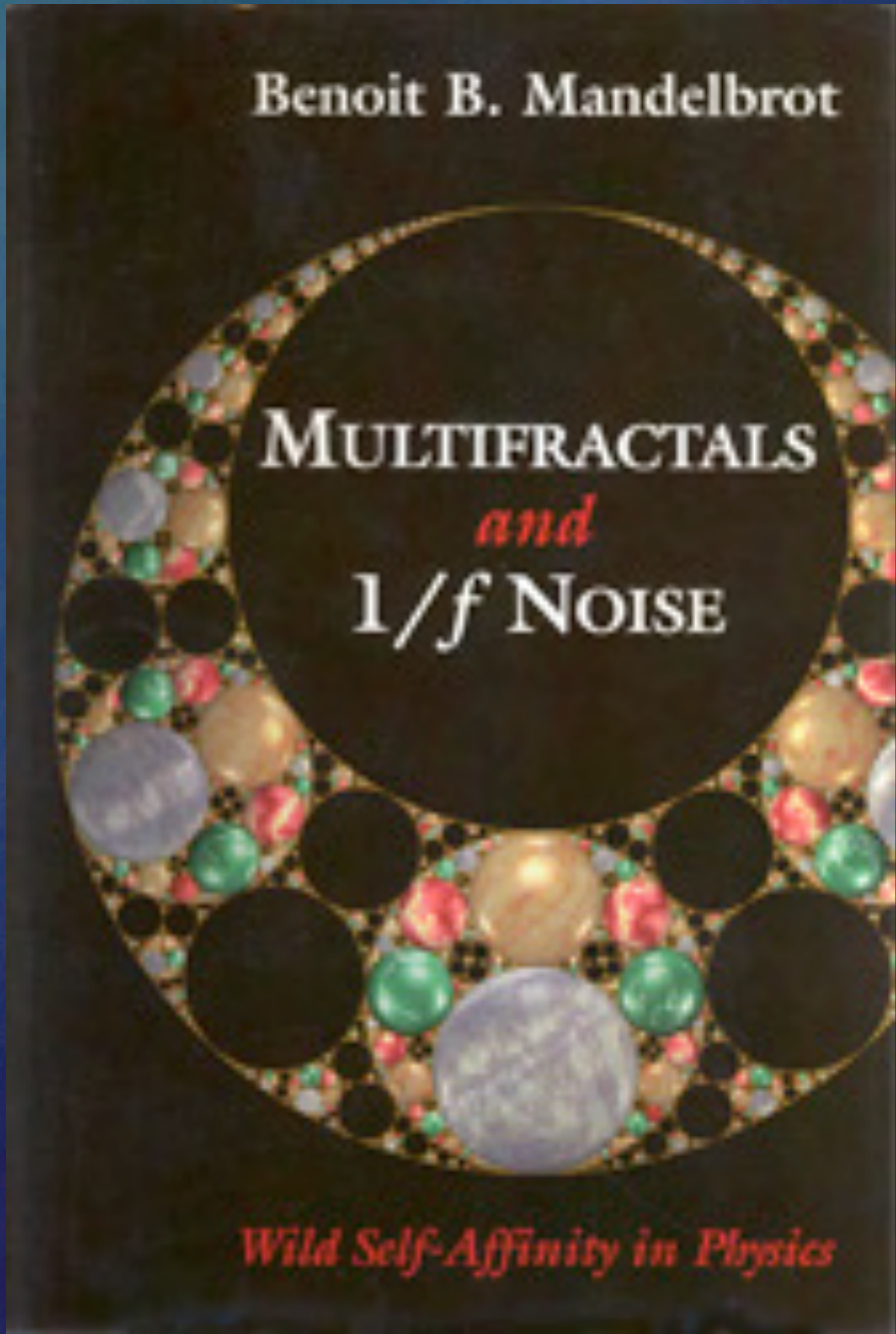
Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 254, p. 3968-3970, séance du 4 juin 1962.

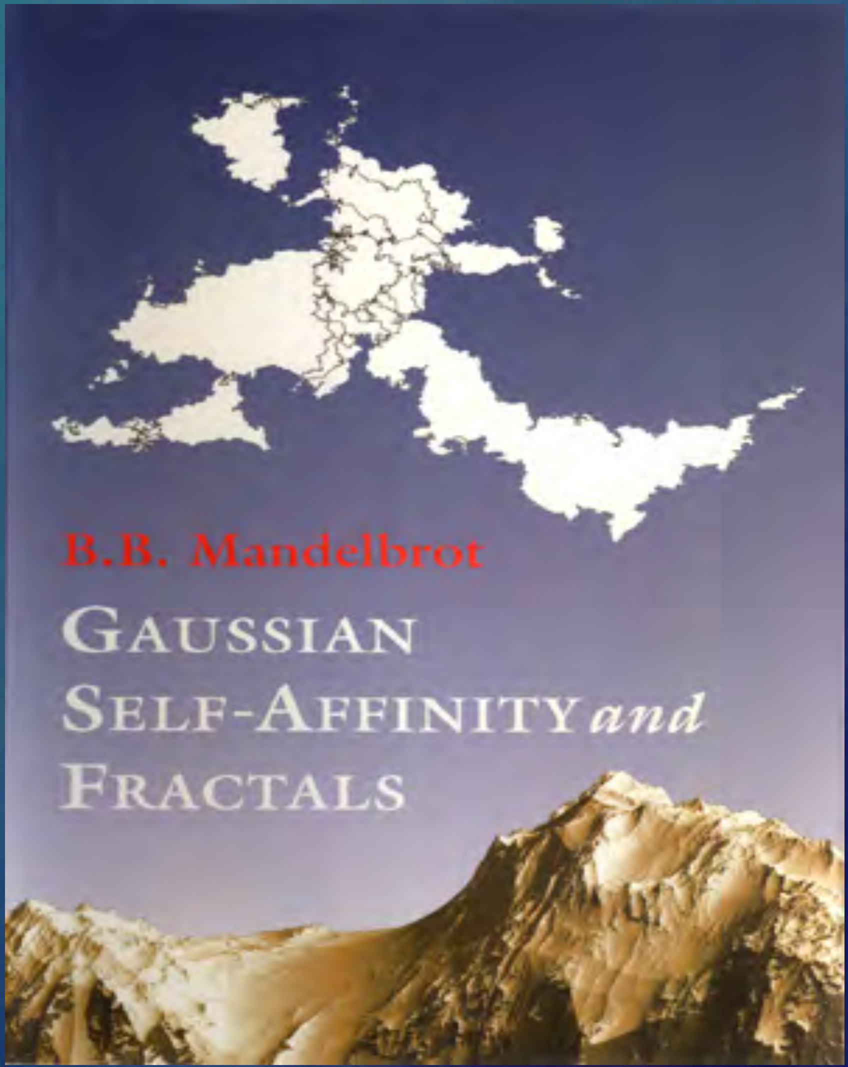
GAUTHIER-VILLARS & Cie,
55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e),
Éditeur-Imprimeur-Libraire.
161922

Imprimé en France.

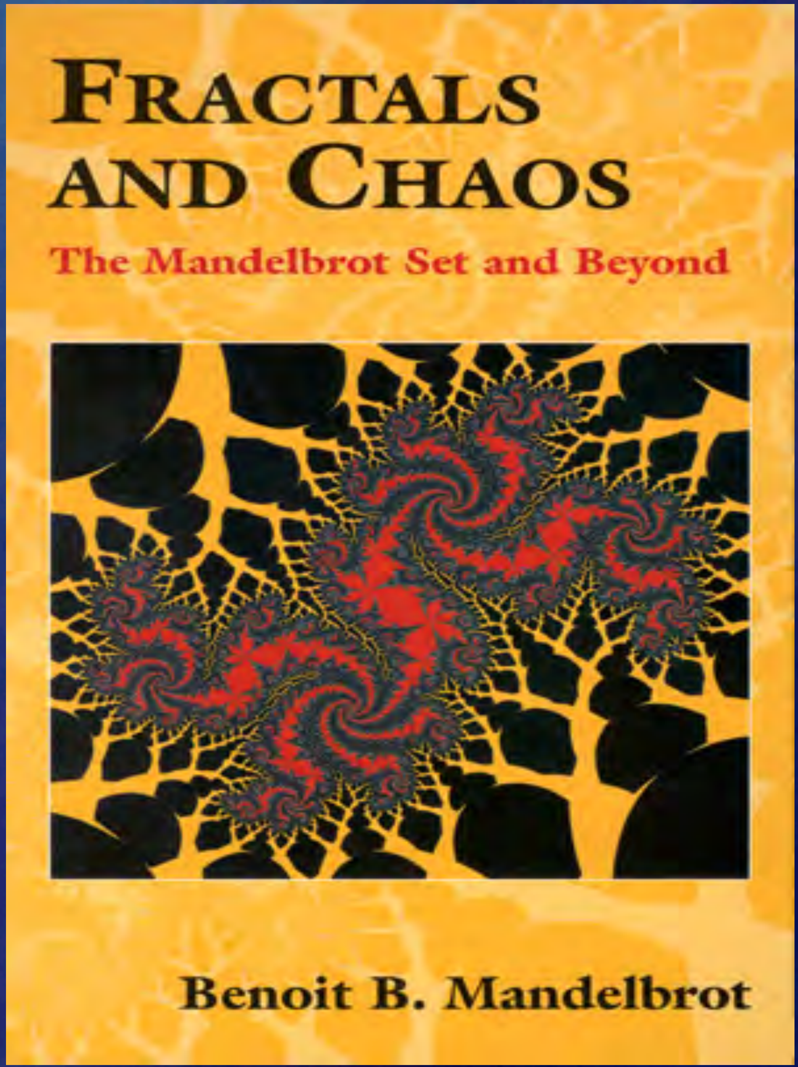


W. H. **Freeman** & Co., 1982.

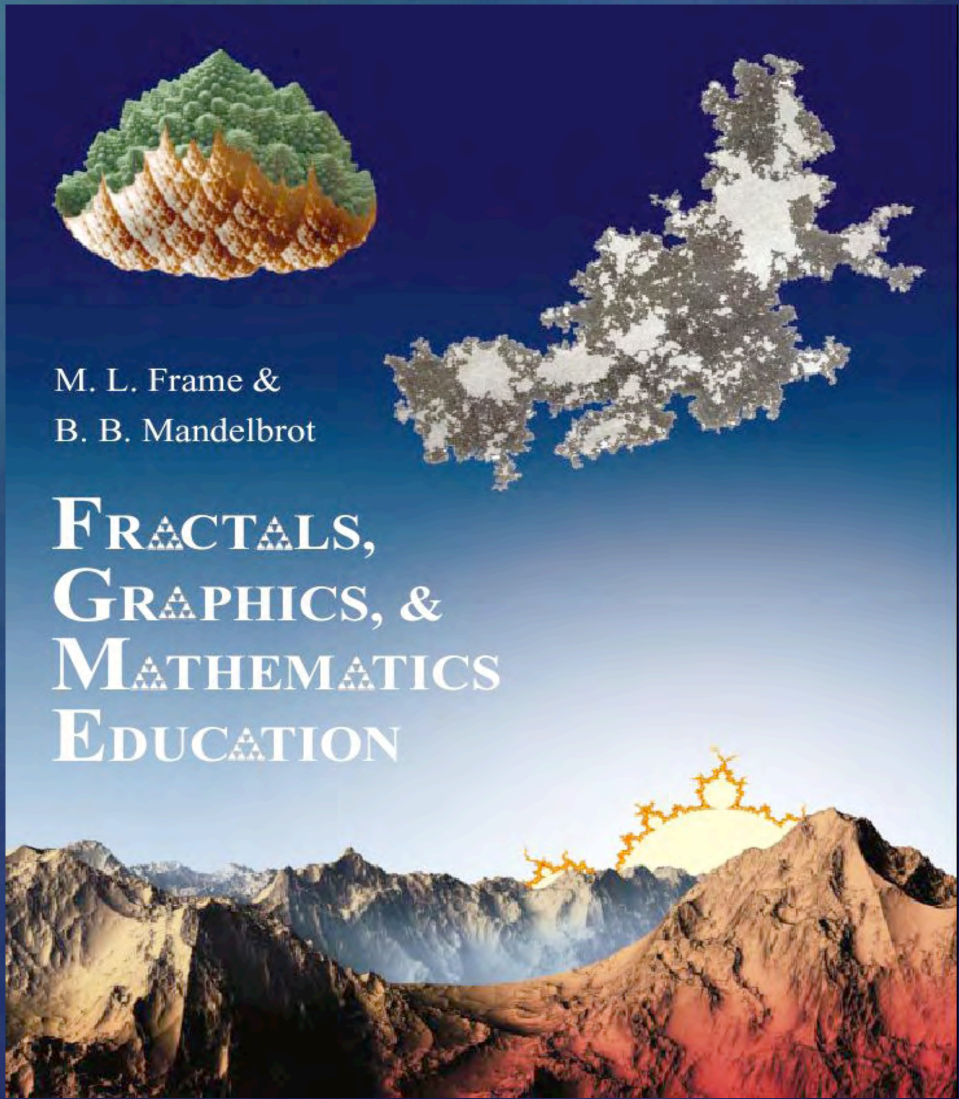

Benoit B. Mandelbrot
MULTIFRACTALS
and
1/f NOISE
Wild Self-Affinity in Physics



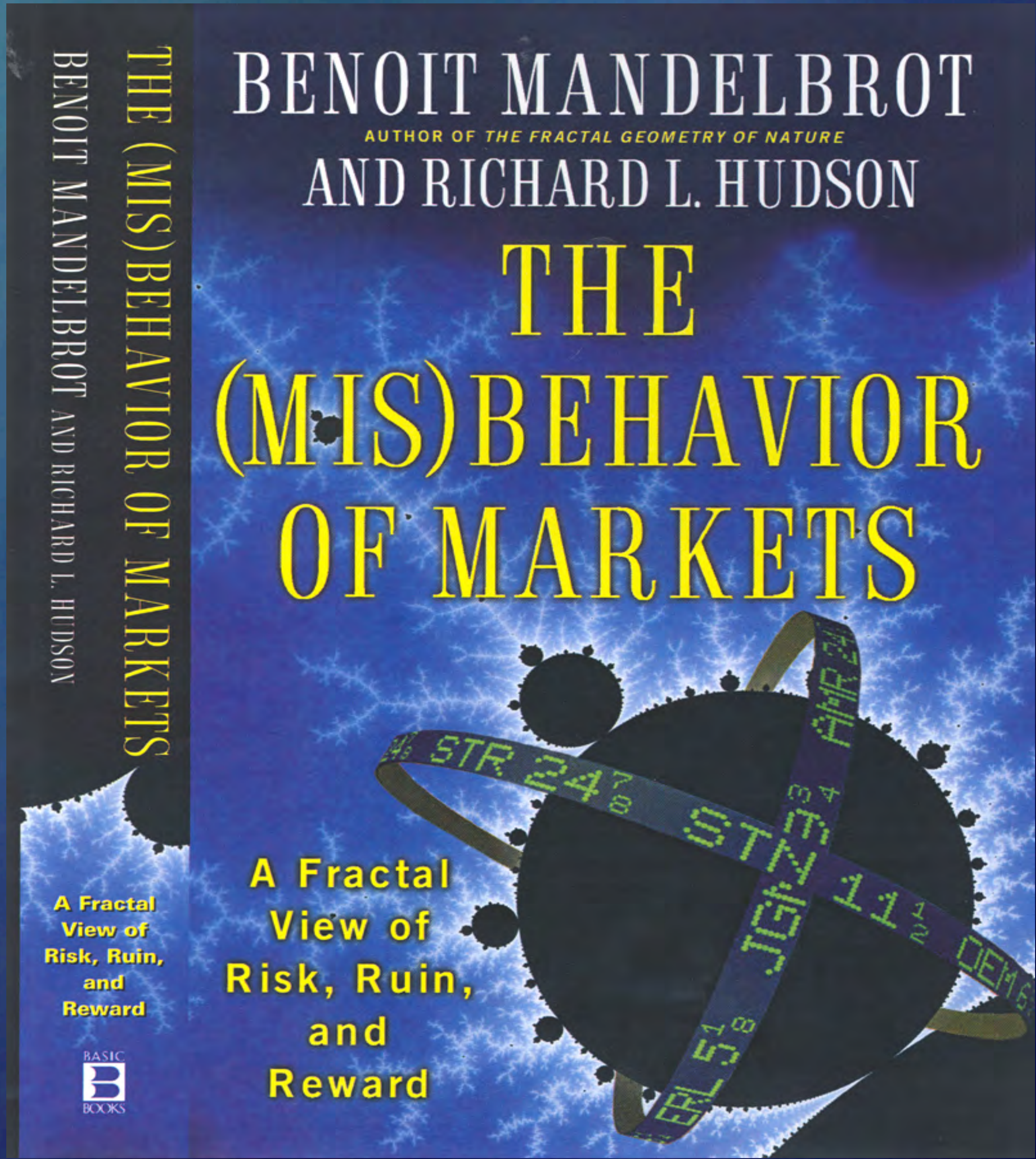
Springer, 2002



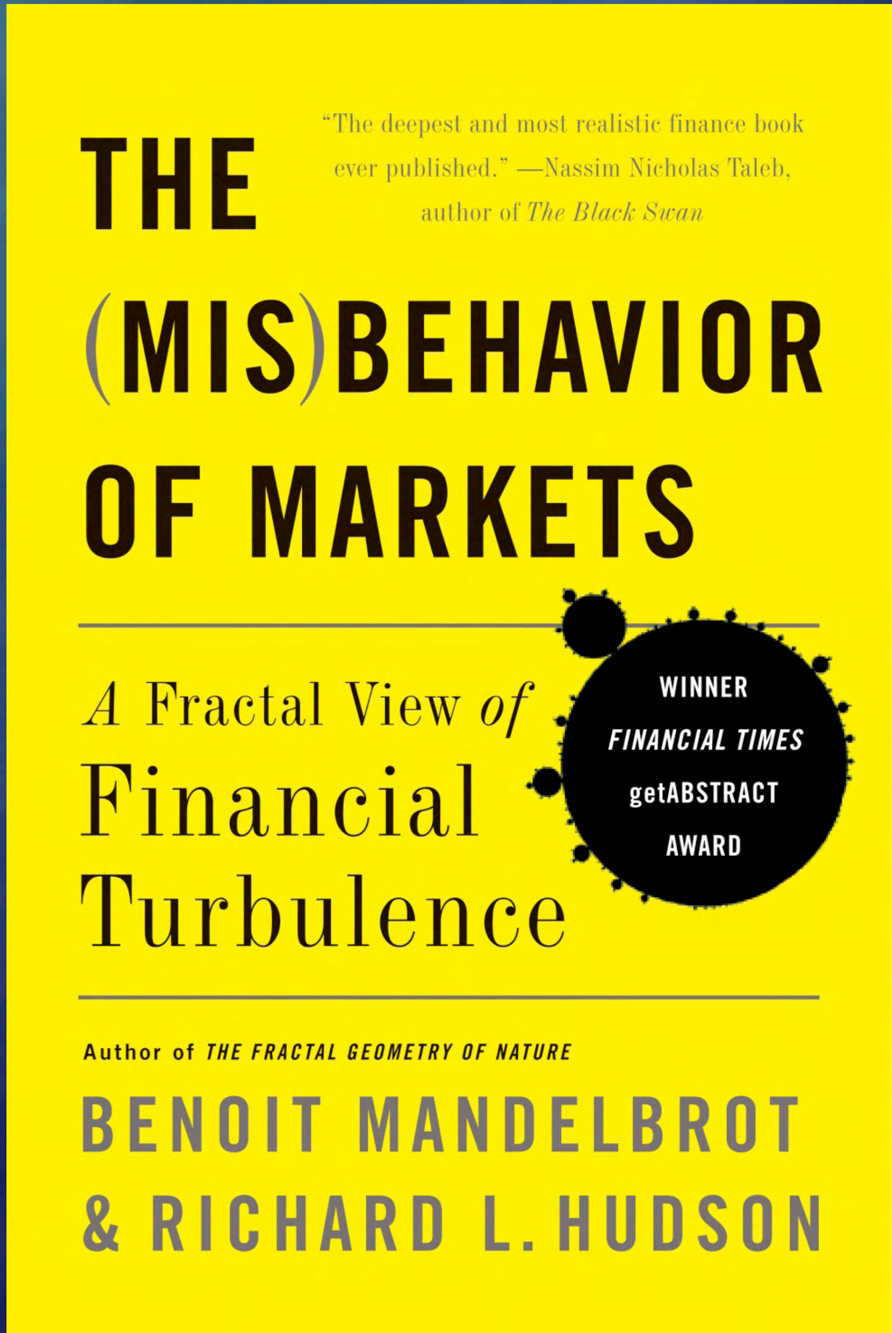
Springer, 2004

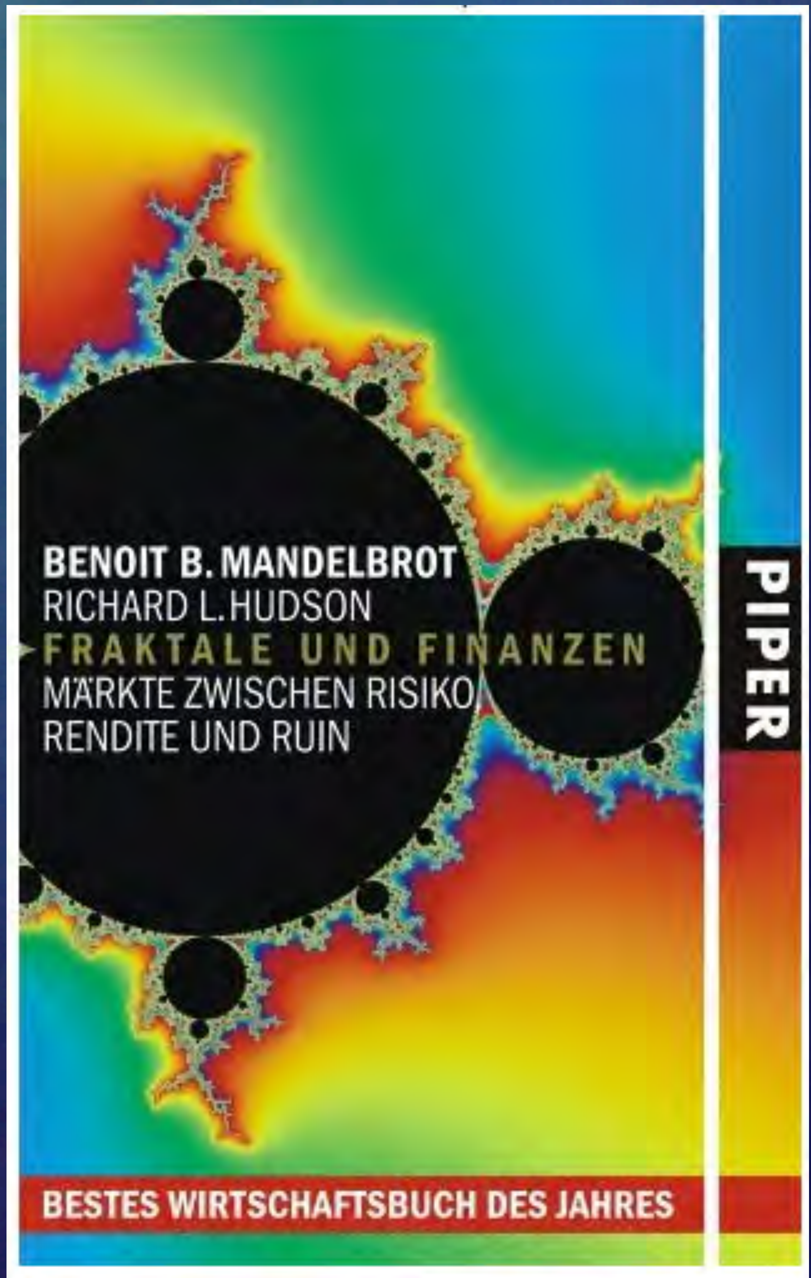


Mathematical Association of America, 2002



Basic Books, 2004


"The deepest and most realistic finance book ever published." —Nassim Nicholas Taleb, author of The Black Swan
THE (MIS)BEHAVIOR OF MARKETS
A Fractal View of Financial Turbulence
WINNER FINANCIAL TIMES getABSTRACT AWARD
Author of THE FRACTAL GEOMETRY OF NATURE
BENOIT MANDELBROT & RICHARD L. HUDSON


BENOIT B. MANDELBROT
RICHARD L. HUDSON
FRAKTALE UND FINANZEN
MÄRKTE ZWISCHEN RISIKO
RENDITE UND RUIN
PIPER
BESTES WIRTSCHAFTSBUCH DES JAHRES